

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

РАЗДЕЛ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ВАРИАНТ 1

1. Найдите производную функции $f(x) = x^3 + 2x$ по определению.
2. Напишите уравнения касательной и нормали к графику функции $y = 2x^2 + 8x + 3$ в точке $x_0 = -1$. Постройте график функции, касательную и нормаль к ней.
3. Для точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 - 5t + 3$, найдите скорость и ускорение, в момент её остановки. (Время t измеряется в секундах, перемещение s - в метрах).
4. Найдите производную y'_x , если: а) $y = \frac{2x-1}{\cos x} + \sqrt[3]{x^5} - 2x \cdot \left(\frac{2}{x} - 4x\right)$; б) $4x^2 + 4xy + y^2 = 0$;
в) $x = a \cos^2 t$, $y = a \sin^2 t$.
5. Найдите производную сложной функции $y = 2 \cdot \ln(\sqrt{1-4x^2})$.
6. Найдите производную и дифференциал функции $y = x^{\sqrt{x}}$, используя логарифмическое дифференцирование.
7. Найдите вторую производную и дифференциал второго порядка функции $y = (x+1) \cdot \arcsin(2x+3)$.
8. Найдите значение выражения $\sqrt[5]{1,1}$, заменяя приращение функции её дифференциалом.
9. Вычислите пределы а) $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x)$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)^x$, используя правило Лопиталья.
10. Исследуйте свойства функции $y = xe^{-\frac{1}{x}}$ и построьте её график.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 \sqrt{3-x}$ на отрезке $[1;3]$.
12. Решите задачу. Как разрезать отрезок длиной 10 см на две части так, чтобы, взяв их за катеты, получить треугольник с наименьшей гипотенузой?

ВАРИАНТ 2

1. Найдите производную функции $f(x) = x^3 - x^2$ по определению.
2. Напишите уравнения касательной и нормали к графику функции $y = x^2 - 4x + 3$ в точке $x_0 = 0$. Постройте график функции, касательную и нормаль к ней.
3. Для точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 6t + 5$, найдите скорость и ускорение, в момент её остановки. (Время t измеряется в секундах, перемещение s - в метрах).
4. Найдите производную y'_x , если а) $y = \frac{x-1}{x+1} + \sqrt[3]{x^2} - 3^x \cdot \log_2 x$; б) $\sin(x+y) = x$; в) $x = 1 - t^2$,
 $y = t - t^3$.
5. Найдите производную сложной функции $y = 2^{\sqrt{1-x^2} + 7x}$.
6. Найдите производную и дифференциал функции $y = x^{1/x}$, используя логарифмическое дифференцирование.
7. Найдите вторую производную и дифференциал второго порядка функции $y = (2-x) \cdot \arccos(3x+2)$.
8. Найдите значение выражения $\sqrt{4,1}$, заменяя приращение функции её дифференциалом.
9. Вычислите пределы а) $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x \cdot \ln(x-1))$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 3^x)^{\frac{1}{x}}$, используя правило Лопиталья.
10. Исследуйте свойства функции $y = \frac{2x}{\ln x}$ и построьте её график.

11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt{3}x + \sin 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.
12. Решите задачу. При каком значении высоты прямоугольная трапеция с острым углом 45° и периметром $P = 4(1 + \sqrt{2})$ имеет наибольшую площадь?

ВАРИАНТ 3

1. Найдите производную функции $f(x) = x^3 + 2$ по определению.
2. Напишите уравнения касательной и нормали к графику функции $y = x^2 + 2x - 4$ в точке $x_0 = 1$. Постройте график функции, касательную и нормаль к ней.
3. Для точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} - 10t + 2$, найдите скорость и ускорение, в момент её остановки. (Время t измеряется в секундах, перемещение s - в метрах).
4. Найдите производную y'_x , если а) $y = \frac{\ln x}{2x+1} + \sqrt[3]{x} - \operatorname{ctg} x \cdot \left(\frac{1}{x} + 2\right)$; б) $\log_3(2y - x) = \frac{1}{2-x}$; в) $x = \frac{t+1}{t}$, $y = \frac{t-1}{t}$.
5. Найдите производную сложной функции $y = \log_2(\sqrt{7x-5} + e^{x^2})$.
6. Найдите производную и дифференциал функции $y = (\sqrt{x})^x$, используя логарифмическое дифференцирование.
7. Найдите вторую производную и дифференциал второго порядка функции $y = (4+x) \cdot \arctg(2x-1)$.
8. Найдите значение выражения $\frac{1}{\sqrt[3]{1,1}}$, заменяя приращение функции её дифференциалом.
9. Вычислите пределы а) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x \cdot \operatorname{tg} x)$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$, используя правило Лопиталя.
10. Исследуйте свойства функции $y = \ln \frac{x}{x-1}$ и построьте её график.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-3; 2]$.
12. Решите задачу. Забором длиной 80 м нужно огородить прямоугольную площадку наибольшей площади. Найдите размеры этой площадки.

ВАРИАНТ 4

1. Найдите производную функции $f(x) = -x^3 + 4x^2$ по определению.
2. Напишите уравнения касательной и нормали к графику функции $y = 2x^2 - 8x + 10$ в точке $x_0 = 1$. Постройте график функции, касательную и нормаль к ней.
3. Для точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 3t + 7$, найдите скорость и ускорение, в момент её остановки. (Время t измеряется в секундах, перемещение s - в метрах).
4. Найдите производную y'_x , если а) $y = \frac{x-1}{3^x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - (3-4x) \cdot \log_{0,5} x$; б) $4^{xy} = \log_4 x$; в) $x = \ln(t^2 + 1)$, $y = t - \operatorname{arctg} t$.
5. Найдите производную сложной функции $y = \sqrt{\sin(x^3) - 2 \ln x}$.
6. Найдите производную и дифференциал функции $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$, используя логарифмическое дифференцирование.
7. Найдите вторую производную и дифференциал второго порядка функции $y = (x-1) \cdot \arccos(3x-2)$.
8. Найдите значение выражения $\frac{1}{\sqrt{4,1}}$, заменяя приращение функции её дифференциалом.

9. Вычислите пределы а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot e^{-x})$, б) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin 2x)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$, используя правило Лопиталя.
10. Исследуйте свойства функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ и постройте её график.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + 2\sqrt{-x}$ на отрезке $[-4; 0]$.
12. Решите задачу. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны 10 см. Определите большее основание так, чтобы её площадь была наибольшей.

ВАРИАНТ 5

1. Найдите производную функции $f(x) = -x^3 + 3x$ по определению.
2. Напишите уравнения касательной и нормали к графику функции $y = x^2 + 6x - 7$ в точке $x_0 = 1$. Постройте график функции, касательную и нормаль к ней.
3. Для точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} - 4t + 1$, найдите скорость и ускорение, в момент её остановки. (Время t измеряется в секундах, перемещение s - в метрах).
4. Найдите производную y'_x , если а) $y = \frac{2^x - 1}{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \arccos x \cdot \ln x$; б) $y^2 + 2yx + 4 = 0$;
в) $x = t \cdot (1 - \sin t)$, $y = t \cdot \cos t$.
5. Найдите производную сложной функции $y = 2^{\sin(\sqrt{x-1}) + \ln x}$.
6. Найдите производную и дифференциал функции $y = x^x$, используя логарифмическое дифференцирование.
7. Найдите вторую производную и дифференциал второго порядка функции $y = (3 - x) \arcsin(5x + 4)$.
8. Найдите значение выражения $\sqrt[5]{32,1}$, заменяя приращение функции её дифференциалом.
9. Вычислите пределы а) $\lim_{x \rightarrow 1} ((x - 1) \cdot \ln(x - 1))$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}$, используя правило Лопиталя.
10. Исследуйте свойства функции $y = \frac{x^3}{(x - 2)^2}$ и постройте её график.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{x}{2} - 2\sqrt{x}$ на отрезке $[0; 16]$.
12. Решите задачу. Заготовка объёмом 72 дм^3 имеет форму прямоугольного параллелепипеда с отношением сторон основания 1:2. При каких размерах площадь полной поверхности заготовки будет наибольшей?

ВАРИАНТ 6

1. Найдите производную функции $f(x) = x^3 + 5x^2$ по определению.
2. Напишите уравнения касательной и нормали к графику функции $y = -x^2 + 4x - 3$ в точке $x_0 = -4$. Постройте график функции, касательную и нормаль к ней.
3. Для точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} - 40t + 8$, найдите скорость и ускорение, в момент её остановки. (Время t измеряется в секундах, перемещение s - в метрах).
4. Найдите производную y'_x , если а) $y = \frac{2x - 1}{\ln(x + 1)} - 5\sqrt[3]{x} - \text{tg}(3x + 5) \cdot \left(2 - \frac{3}{x^2} \right)$; б) $\cos(x - 2y) = 4^x$;
в) $x = e^t \cdot \sin t$, $y = e^t \cdot \cos t$.
5. Найдите производную сложной функции $y = \arcsin(\sqrt{7 - x^2} + 4^x)$.
6. Найдите производную и дифференциал функции $y = (x^2)^{y^x}$, используя логарифмическое дифференцирование.

- Найдите вторую производную и дифференциал второго порядка функции $y = (x-2) \cdot \arcsin(7x+2)$.
- Найдите значение выражения $\sqrt{16,1}$, заменяя приращение функции её дифференциалом.
- Вычислите пределы а) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \cdot (1-x) \right)$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x)^{\frac{1}{x}}$, используя правило Лопиталья.
- Исследуйте свойства функции $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ и постройте её график.
- Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{x}{2} - \cos x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.
- Решите задачу. Определите размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

ВАРИАНТ 7

- Найдите производную функции $f(x) = -x^3 - 4x$ по определению.
- Напишите уравнения касательной и нормали к графику функции $y = -x^2 - 8x - 17$ в точке $x_0 = -3$. Постройте график функции, касательную и нормаль к ней.
- Для точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t + 12$, найдите скорость и ускорение, в момент её остановки. (Время t измеряется в секундах, перемещение s - в метрах).
- Найдите производную y'_x , если а) $y = \frac{\arcsin x - 1}{2x + 1} + \frac{3}{x^4} - 5^{2x} \cdot (\sqrt[3]{x^2} + \ln x)$; б) $5^{x+y} = 2^y$; в) $x = t^2 + 2t$, $y = t^3 + t$.
- Найдите производную сложной функции $y = \log_2(\operatorname{tg}(3x+5)) - \frac{1}{x^2}$.
- Найдите производную и дифференциал функции $y = \operatorname{tg} x^{\operatorname{ctg} x}$, используя логарифмическое дифференцирование.
- Найдите вторую производную и дифференциал второго порядка функции $y = (x+3) \cdot \operatorname{arctg}(2x-1)$.
- Найдите значение выражения $\frac{1}{\sqrt[5]{32,1}}$, заменяя приращение функции её дифференциалом.
- Вычислите пределы а) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} \pi x \cdot x)$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$, используя правило Лопиталья.
- Исследуйте свойства функции $y = x^2 \cdot \ln x$ и постройте её график.
- Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + \frac{9}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 9 \right]$.
- Решите задачу. Число 6 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наибольшей.

ВАРИАНТ 8

- Найдите производную функции $f(x) = -x^3 + x^2$ по определению.
- Напишите уравнения касательной и нормали к графику функции $y = x^2 - 8x + 13$ в точке $x_0 = 2$. Постройте график функции, касательную и нормаль к ней.
- Для точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} - 6t + 3$, найдите скорость и ускорение, в момент её остановки. (Время t измеряется в секундах, перемещение s - в метрах).
- Найдите производную y'_x , если а) $y = \frac{7^{x+1} - 1}{\cos x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + (4x^2 + 3x - 2) \cdot \log_2 x$; б) $x^2 + 6xy + 9y^2 = 1$; в) $x = 2 \cos t - \cos 2t$, $y = 2 \sin t - \sin 2t$.
- Найдите производную сложной функции $y = \sin(5^{x^2+3x}) - \sqrt{2-x}$.

- Найдите производную и дифференциал функции $y = x^{x^2}$, используя логарифмическое дифференцирование.
- Найдите вторую производную и дифференциал второго порядка функции $y = (4 - x) \cdot \operatorname{arctg}(3x + 1)$.
- Найдите значение выражения $\frac{1}{\sqrt{16,1}}$, заменяя приращение функции её дифференциалом.
- Вычислите пределы а) $\lim_{x \rightarrow 0} ((1 - \cos x) \cdot \operatorname{ctg} x)$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$, используя правило Лопиталя.
- Исследуйте свойства функции $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ и постройте её график.
- Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{x^2}{e^x}$ на отрезке $[-1; 3]$.
- Решите задачу. Из прямоугольно листа картона размером 24×15 м², вырезая квадраты из четырех углов, требуется изготовить открытую коробку наибольшего объёма. Каковы размеры этой коробки?

ВАРИАНТ 9

- Найдите производную функции $f(x) = x^3 - 6x$ по определению.
- Напишите уравнения касательной и нормали к графику функции $y = -x^2 + 6x - 10$ в точке $x_0 = 4$. Постройте график функции, касательную и нормаль к ней.
- Для точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 - 8t + 2$, найдите скорость и ускорение, в момент её остановки. (Время t измеряется в секундах, перемещение s - в метрах).
- Найдите производную y'_x , если а) $y = \frac{5x-1}{2^x+1} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - (\operatorname{arctg} x + \sqrt{3x}) \cdot \ln x$; б) $\ln \left(\frac{2+x}{3-y} \right) = x$; в) $x = \cos t$, $y = t + 2 \sin t$.
- Найдите производную сложной функции $y = (\sin(x^2) + 2^x)^3$.
- Найдите производную и дифференциал функции $y = (\sqrt{x})^{x^2}$, используя логарифмическое дифференцирование.
- Найдите вторую производную и дифференциал второго порядка функции $y = (x+2) \cdot \operatorname{arccos}(4x-5)$.
- Найдите значение выражения $\sqrt[5]{243,1}$, заменяя приращение функции её дифференциалом.
- Вычислите пределы а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{arcsin} x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right)$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\frac{\cos \pi x}{2}}$, используя правило Лопиталя.
- Исследуйте свойства функции $y = \frac{e^x}{x}$ и постройте её график.
- Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{2}{x+1} + \frac{x}{2}$ на отрезке $\left[0; \frac{5}{2}\right]$.
- Решите задачу. Из круглого бревна с радиусом сечения 20см требуется вырезать брус прямоугольного сечения так, чтобы получилось наименьшее количество отходов. Определите размеры прямоугольного сечения бруса.

ВАРИАНТ 10

- Найдите производную функции $f(x) = x^3 + 2x^2$ по определению.
- Напишите уравнения касательной и нормали к графику функции $y = x^2 - 2x - 2$ в точке $x_0 = -2$. Постройте график функции, касательную и нормаль к ней.
- Для точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 20t + 1$, найдите скорость и уско-

рение, в момент её остановки. (Время t измеряется в секундах, перемещение s - в метрах).

4. Найдите производную y'_x , если а) $y = \frac{7x-1}{\ln x} + \sqrt[4]{x} - (3^{x-4} + 4) \cdot \frac{5}{x^3}$; б) $\operatorname{arctg}(xy) = 5^{x+1}$; в) $x = t^2 - 2t$,
 $y = t^2 + 2t$.
5. Найдите производную сложной функции $y = \sqrt[5]{\log_2(3x-5)} + \cos x$.
6. Найдите производную и дифференциал функции $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{x^2}$, используя логарифмическое дифференцирование.
7. Найдите вторую производную и дифференциал второго порядка функции $y = (x-4)\arcsin(6x-1)$.
8. Найдите значение выражения $\sqrt{64,1}$, заменяя приращение функции её дифференциалом.
9. Вычислите пределы а) $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln(x-1) \cdot \sin \pi x)$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^{-x})^{x^2}$, используя правило Лопиталья.
10. Исследуйте свойства функции $y = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x}$ и постройте её график.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 1$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.
12. Решите задачу. В конус высотой 40 см и радиусом основания 30 см требуется вписать цилиндр наибольшего объёма. Каковы размеры цилиндра?